die Punktekonfiguration unter Wahrung der vorgegebenen Distanzen geometrisch darstellen kann. Lösungsvorschläge für dieses Problem findet man bei Borg (1981), Borg und Staufenbiel (1993), Cooper (1972), Messick und Abelson (1956), Lüer und Fillbrandt (1969), Sixtl (1967) sowie Torgerson (1958).

Das mathematische Problem einer »klassischen« multidimensionalen Skalierung besteht darin, für empirisch ermittelte Distanzen diejenige additive Konstante zu finden, die bei einer minimalen Anzahl von Dimensionen eine geometrische Darstellbarkeit der Objekte zulässt.

Liegt die additive Konstante fest, ähnelt das weitere Vorgehen dem einer Faktorenanalyse (▶ Anhang B). Durch Hinzufügen der additiven Konstanten werden die empirisch ermittelten (komparativen) Distanzen in absolute Distanzen überführt, die ihrerseits in sog. Skalarprodukte umgewandelt werden (vgl. z. B. Sixtl, 1967, S. 290 ff.). Die Faktorenanalyse über die Skalarprodukte führt zu Dimensionen der Ähnlichkeit, die über die sog. »Ladungen« der untersuchten Objekte (= Positionen der Objekte auf den Dimensionen) inhaltlich interpretiert werden. Dies wird in ◘ Box 4.7 für ein Beispiel der nonmetrischen multidimensionalen Skalierung demonstriert.

Die Interpretation einer MDS-Lösung kann – wie bei allen dimensionsanalytischen Verfahren – Probleme bereiten. Fehlerhafte oder nachlässige Urteile führen häufig zu wenig aussagekräftigen Strukturen, deren Bedeutung – vor allem bei geringer Objektzahl – nur schwer zu erkennen ist. Die Interpretation sollte deshalb nur der Anregung inhaltlicher Hypothesen über diejenigen Merkmale dienen, die den Ähnlichkeitsurteilen zugrunde liegen. Allzu starke Subjektivität wird vermieden, wenn man die von Shepard (1972, S. 39 ff.) vorgeschlagenen Interpretationshilfen nutzt.

Diesem multidimensionalen Skalierungsverfahren liegt die Modellannahme zugrunde, dass zwischen den empirisch ermittelten Ähnlichkeiten und den Distanzen der untersuchten Objekte in der Punktekonfiguration eine **lineare Beziehung** besteht (weshalb diese Skalierung gelegentlich auch metrische oder lineare MDS genannt wird). Die Güte der Übereinstimmung zwischen den empirischen Distanzen (oder Ähnlichkeiten) und den Distanzen, die aufgrund der gefundenen Punktekonfiguration reproduzierbar sind, kann durch Anpassungstests überprüft werden (vgl. z. B. Torgerson, 1958, S. 277 ff.; Ahrens, 1974, S. 103 ff.). MDS ist Bestandteil der gängigen Statistikprogrammpakete (▶ Anhang D). Eine Zusammenstellung der wichtigsten MDS-Software findet man bei Borg und Groenen (2005, Anhang A1)

Die nonmetrische multidimensionale Skalierung (NMDS)

Erheblich schwächere Annahmen als die »klassische« MDS macht ein Skalierungsansatz, der von Kruskal (1964a,b) ausgearbeitet und von Shephard (1962) angeregt wurde: die nonmetrische multidimensionale Skalierung (NMDS). Von beliebigen Angaben über Ähnlichkeiten (Unähnlichkeiten) der untersuchten Objektpaare (z. B. Distanzratings, Korrelationen, Übergangswahrscheinlichkeiten, Interaktionsraten etc.) wird in diesem Verfahren lediglich die **ordinale Information** verwendet, d. h., die Rangfolge der ihrer Größe nach geordneten Ähnlichkeiten. Das Ziel der NMDS besteht darin, eine Punktekonfiguration zu finden, für die sich eine Rangfolge der Punktedistanzen ergibt, die mit der Rangfolge der empirischen Unähnlichkeiten möglichst gut übereinstimmt. Gefordert wird damit keine lineare (wie bei der metrischen MDS), sondern lediglich eine **monotone Beziehung** zwischen den empirisch gefundenen Ähnlichkeiten und den Punktedistanzen in der zu ermittelnden Punktekonfiguration.

Das Ziel der nonmetrischen multidimensionalen Skalierung ist eine Punktekonfiguration, die so geartet ist, dass zwischen den Objektdistanzen und den empirisch ermittelten Unähnlichkeiten eine monotone Beziehung besteht.

Das Verfahren beginnt mit einer beliebigen Startkonfiguration der untersuchten Objekte, deren Dimensionalität probeweise vorzugeben ist. Diese Konfiguration wird schrittweise so lange verändert, bis die Rangreihe der Distanzen zwischen den Punkten in der Punktekonfiguration mit der Rangreihe der empirisch gefundenen Unähnlichkeiten möglichst gut übereinstimmt. Für die Güte der Übereinstimmung ermittelt das Verfahren eine Maßzahl, den sog. **Stress**. Es werden dann Stresswerte für Konfigurationen mit unterschiedlicher Dimensionszahl verglichen. Diejenige Konfiguration, die bei möglichst geringer Anzahl von Dimensionen den geringsten

J. Bortz, N. Döring, Forschungsmethoden und Evaluation, DOI 10.1007/978-3-540-33306-7,

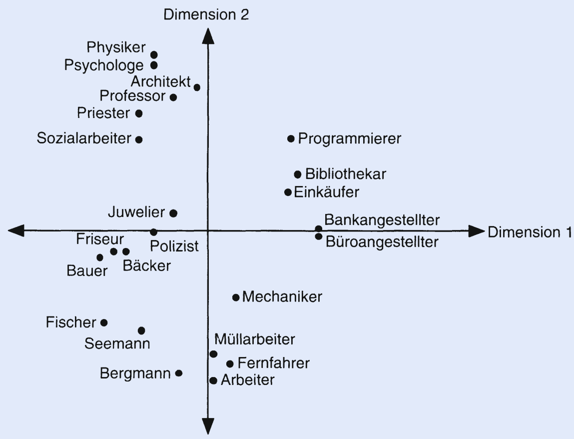
Box 4.7

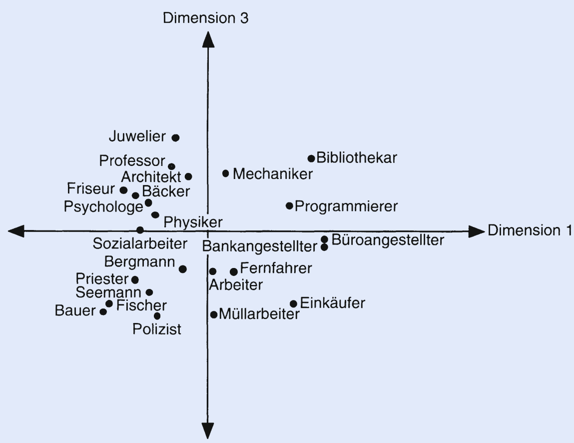
Die Ähnlichkeit von Berufen – Ein Beispiel für eine multidimensionale Skalierung

Burton (1972) untersuchte die Ähnlichkeit verschiedener Berufe mit Hilfe der nonmetrischen multidimensionalen Skalierung nach Kruskal (1964). Es wurde zunächst die folgende eindimensionale Lösung berechnet (es werden nur Auszüge der vollständigen Analyse wiedergegeben):

Beruf	Skalenwert
Bauer	1,785
Fischer	1,637
Müllarbeiter	1,373
Seemann	1,336
Bergmann	1,147
Arbeiter	1,054
Priester	1,047
Fernfahrer	0,972
Psychologe	0,707
Physiker	0,705
Architekt	0,654
Professor	0,521
Mechaniker	0,201
Sozialarbeiter	0,066
Juwelier	-0,130
Bäcker	-0,385
Friseur	-0,517
Polizist	-0,891
Programmierer	-1,238
Bibliothekar	-1,342
Einkäufer	-1,538
Büroangestellter	-1,566
Bankangestellter	-1,637

Burton interpretierte diese Dimension als »Unabhängigkeit bzw. Freiheit in der Berufsausübung«. Ferner stellte die folgende dreidimensionale Konfiguration eine akzeptable Lösung dar:





Die erste Dimension interpretiert Burton als »berufliche Unabhängigkeit«, die zweite als »berufliches Prestige« und die dritte als »berufliche Fertigkeiten« (skill).

J. Bortz, N. Döring, Forschungsmethoden und Evaluation, DOI 10.1007/978-3-540-33306-7,
© Springer Medizin Verlag Heidelberg 2006

Stress aufweist, gilt als die beste Repräsentation der untersuchten Objekte. Stresswerte werden üblicherweise wie folgt klassifiziert (vgl. z. B. Borg & Lingoes, 1987; Timm, 2002, S. 546):

20%	schlecht
10%	mäßig
5%	gut
2,5%	exzellent
0%	perfekt

(Zur Kritik dieser Kategorisierung vgl. Borg, 2000.)

Die Interpretation der gefundenen, intervallskalierten Dimensionen erfolgt – wie in der metrischen MDS – anhand von Kennwerten (Ladungen), die die Bedeutsamkeit der Urteilsdimensionen für die untersuchten Objekte charakterisieren. Box 4.7 gibt hierfür ein Beispiel. Eine ausführlichere Beschreibung der Lösungsprozedur findet man in der Originalarbeit von Kruskal (1964a,b), bei Scheuch und Zehnpfennig (1974, S. 153 f., zit. nach Kühn, 1976) oder bei Gigerenzer (1981, Kap. 9). Als eine kurze, gut verständliche Einführung mit Ratschlägen zur Interpretation von Skalierungslösungen sei Borg (2000) empfohlen. Für die Anfertigung eines Rechenprogramms sind die Ausführungen von van der Ven (1980) besonders hilfreich; über bereits vorhandene EDV-Routinen (z. B. die ALSCAL-Prozedur in SAS oder PROXSCAL im SPSS-Paket) informiert ▶ Anhang D.

Minkowski-Metriken. Die bisher behandelten MDS- und NMDS-Ansätze gingen davon aus, dass die Distanzen zwischen zwei Punkten der Punktekonfiguration als deren kürzeste Verbindung nach dem euklidischen Lehrsatz $\left(a = \sqrt{b^2 + c^2}\right)$ bestimmt wird. Die nonmetrische multidimensionale Skalierung lässt jedoch allgemeine Metriken zu, die über die euklidische Metrik hinausgehen und die als Minkowski-r-Metriken bezeichnet werden. Aus der Menge aller möglichen r-Metriken sind am bekanntesten: r=1: City-Block-Metrik (Attneave, 1950); r=2: euklidische Metrik und r→∞: Supremum-(Dominanz)-Metrik. Zwischen den Extremen r=1 und r→∞ kann r jeden beliebigen Wert annehmen und spannt damit ein Kontinuum unendlich vieler Metriken auf. (Ausführliche Informationen über formale Eigenschaften der Minkowski-r-Metriken gibt z. B. Ahrens, 1974, Kap. 3.1.3.) Wir wollen uns damit begnügen, die drei oben genannten Metriken zu verdeutlichen.

Im n-dimensionalen Raum wird die Distanz d_{ij} zweier Punkte i und j für eine beliebige Metrik r nach folgender Beziehung bestimmt:

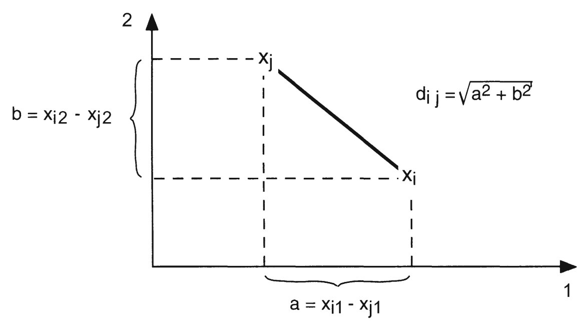
$$d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\left|x_{ik} - x_{jk}\right|\right)^{r}\right]^{1/r},$$

wobei x_{ik} die Koordinate des Punktes i und x_{jk} die Koordinate des Punktes j auf der Dimension k bezeichnen.

Mit r=2 erfasst dieses Maß die bekannte euklidische Distanz

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - x_{jk})^{2}},$$

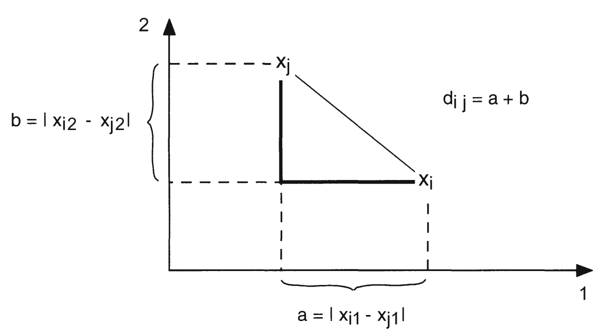
die sich für n=2 Dimensionen folgendermaßen geometrisch veranschaulichen lässt:



Setzen wir r=1, resultiert eine Distanz nach der City-Block-Metrik:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left|x_{ik} - x_{jk}\right|.$$

Diese Distanz lässt sich für n=2 grafisch in folgender Weise veranschaulichen:



Sie ergibt sich als die Summe der Absolutbeträge der Koordinatendifferenzen. Die Bezeichnung »City-Block-

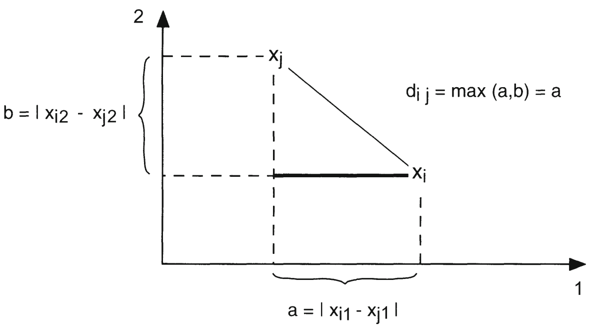
J. Bortz, N. Döring, Forschungsmethoden und Evaluation, DOI 10.1007/978-3-540-33306-7,

Distanz« geht auf die Situation eines Autofahrers zurück, der in einer Stadt (mit rechtwinklig verlaufenden Straßen) die Distanz zwischen Start und Ziel kalkuliert. Da die »Luftliniendistanz« nicht befahrbar ist (dies wäre die euklidische Distanz), setzt sich die Fahrstrecke aus zwei rechtwinkligen Straßenabschnitten zusammen – der City-Block-Distanz.

Für die Ermittlung einer Distanz nach der Suprememummetrik setzen wir $r \to \infty$. Die allgemeine Distanzgleichung vereinfacht sich dann zu

$$d_{ij} = \max\left(\left|x_{ik} - x_{jk}\right|\right).$$

Diese Distanz entspricht – wie die folgende Abbildung für n=2 verdeutlicht – der maximalen Koordinatendifferenz:



Da a>b ist, resultiert für die Supremumdistanz d_{ij}=a. Die Distanz entspricht der »dominierenden« Koordinatendifferenz (Dominanzmetrik).

Bedeutung verschiedener Metriken. Das NMDS-Verfahren bestimmt nicht nur die optimale Dimensionszahl, sondern auch diejenige Metrik, die den Ähnlichkeitsurteilen der Untersuchungsteilnehmer vermutlich zugrunde lag. Diese Metriken werden gelegentlich zur Beschreibung psychologisch unterscheidbarer Urteilsprozesse herangezogen.

Ähnlichkeitspaarvergleiche eignen sich vorzugsweise für die Skalierung komplexer, durch viele Merkmale charakterisierbarer Objekte. Die Instruktion, nach der die Untersuchungsteilnehmer die Paarvergleiche durchführen, sagt nichts darüber aus, nach welchen Kriterien die Ähnlichkeiten einzustufen sind. Dies bleibt den Untersuchungsteilnehmern selbst überlassen. Sie können beispielsweise die zu vergleichenden Objekte sorgfältig hinsichtlich einzelner Merkmale analysieren, um dann Merkmal für Merkmal die Gesamtähnlichkeit aufzubauen. Dieses Vorgehen käme einer durch die City-Block-Metrik charakterisierten Urteilsweise sehr nahe.

Es sind auch Ähnlichkeitsurteile denkbar, die nur ein – gewissermaßen ins Auge springendes – Merkmal beachten, das die zu vergleichenden Objekte am stärksten differenziert. Diese Urteilsweise ließe sich durch die Supremummetrik beschreiben. In entsprechender Weise sind Zwischenwerte zu interpretieren: Im Bereich r>2 überwiegen »spezifisch-akzentuierende« und im Bereich r<2 »analytisch-kumulierende« Urteilsweisen (vgl. Bortz, 1975b).

Wie Wender (1969) zeigte, hängt die Art, wie Ähnlichkeitsurteile zustande kommen, auch von der Schwierigkeit der Paarvergleichsaufgabe ab: Je schwerer die Paarvergleichsurteile zu erstellen sind, desto höher ist der für das Urteilsverhalten typische Metrikkoeffizient. Bei schweren Paarvergleichen werden die deutlich differenzierenden Merkmale stärker gewichtet als die weniger differenzierenden Merkmale, und bei leichten Paarvergleichsurteilen erhalten alle relevanten Merkmale ein ähnliches Gewicht. Weitere Hinweise zur psychologischen Interpretation des Metrikparameters geben Cross (1965); Micko und Fischer (1970) sowie Shepard (1964). Methodenkritische Überlegungen zur Interpretation verschiedener Metriken liegen von Beals et al. (1968), Bortz (1974, 1975a), Wender (1969) und Wolfrum (1976a,b) vor.

Die Analyse individueller Differenzen (INDSCAL)

Die Charakterisierung des Urteilsverhaltens durch einen Metrikparameter ist hilfreich für die Fragestellung, ob die beachteten Urteilsdimensionen gleich oder verschieden stark gewichtet wurden. Die Frage, wie stark ein Urteiler eine bestimmte Urteilsdimension gewichtet, wird damit jedoch nicht befriedigend beantwortet. Hierfür ist ein Verfahren einschlägig, das unter der Bezeichnung INDSCAL (Individual Scaling von Carroll & Chang, 1970) bekannt wurde.

Ausgangsmaterial sind die durch eine Urteilergruppe im Paarvergleich (oder in einem vergleichbaren Verfahren) bestimmten Ähnlichkeiten zwischen den zu skalierenden Objekten. Das Verfahren ermittelt neben der für alle Urteiler gültigen Reizkonfiguration (»Group Stimulus Space«) für jeden Urteiler einen individuellen Satz

J. Bortz, N. Döring, Forschungsmethoden und Evaluation, DOI 10.1007/978-3-540-33306-7,