2 Inferenzstatistik

Björn Rasch, Malte Friese, Wilhelm Hofmann, Ewald Naumann

B. Rasch et al., *Quantitative Methoden 1*,
DOI 10.1007/978-3-662-43524-3_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Lernziele

- Was ist eine diskrete und was eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung?
- Was ist eine Normalverteilung und welche Eigenschaften bestimmen ihre Form?
- Wie verteilen sich Wahrscheinlichkeiten unter einer Normalverteilung?
- Was ist die Standardnormalverteilung?
- Wie hängen Standardnormalverteilung und die Standardisierung von Daten aus ▶ Kap. 1 zusammen?
- Was ist eine Stichprobenkennwerteverteilung und wozu ist sie hilfreich?
- Was ist der Standardfehler des Mittelwerts, was ein Konfidenzintervall und wie hängen diese beiden Dinge miteinander zusammen?

Das folgende Kapitel ist von besonderer Bedeutung für dieses Buch, da es den Grundstein zum Verstehen aller weiteren inhaltlichen Konzepte legt. Dabei sei zunächst die Kapitelüberschrift erklärt. »Inferenzstatistik« bedeutet übersetzt »schließende Statistik«. Damit ist der Schluss von den erhobenen Daten einer Stichprobe auf Werte in der Population gemeint. Darüber mehr in ▶ Abschn. 2.3. Zunächst soll auf ein grundlegendes statistisches Phänomen, die Normalverteilung von Merkmalen, eingegangen werden. Die Annahme der Normalverteilung (▶ Abschn. 2.1) ist dabei nicht nur in diesem Kapitel ein zentrales Element, sondern Voraussetzung für alle weiterführenden Überlegungen der Inferenz- und Teststatistik. Ihr Verstehen ist daher essenziell. Die Standardnormalverteilung ist ein nützlicher Spezialfall der Normalverteilung. Sie wird in ▶ Abschn. 2.2 näher beleuchtet. Schließlich führt die Stichprobenkennwerteverteilung (▶ Abschn. 2.3) in das Gebiet der Inferenzstatistik ein.

In der Inferenzstatistik wird von Ergebnissen aus einer Stichprobe auf Populationswerte geschlossen.

2.1 Die Normalverteilung

Der ► Abschn. 1.3 charakterisierte das arithmetische Mittel und die Varianz als zentrale Kennwerte einer Verteilung. Doch welche Aussagekraft haben sie wirklich? Inwieweit bestimmen sie die Form einer Verteilung? Diese Fragen beantwortet der folgende Abschnitt.

In der Natur sind sehr viele Merkmale normalverteilt. Dies gilt beispielsweise für die Körpergröße, Intelligenz oder das Sehvermögen. Die Normalverteilung galt sogar zeitweise als eine Art Naturgesetz. Auch wenn diese Vorstellung mittlerweile abgelehnt wird, so zeigt sie doch die herausragende Bedeutung der Normalverteilung in der Mathematik und in den empirischen Sozialwissenschaften. Sehr viele statistische Verfahren, die für wissenschaftliches Arbeiten erforderlich sind, setzen voraus, dass die relevanten Merkmale in der Population normalverteilt sind.

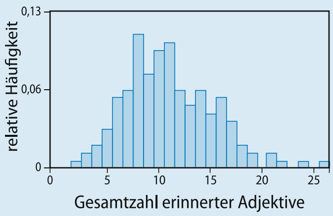

Abb. 2.1 Relative Häufigkeit der Gesamtanzahl der erinnerten Wörter im Gedächtnisexperiment (n = 150)

► Daten zum Gedächtnisexperiment auf http://www.lehrbuch-psychologie.de

2.1.1 Die Normalverteilungsannahme

Betrachten wir das Diagramm der relativen Häufigkeiten in Abb. 2.1. Die Daten stammen aus dem in der Einführung erklärten Gedächtnisexperiment mit n = 150 Versuchspersonen. Hier ist abgetragen, wie viele Versuchspersonen (relativiert an allen Versuchspersonen) eine bestimmte Anzahl von Adjektiven erinnert haben. Mit anderen Worten geben die Säulen in dem Diagramm die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine bestimmte Anzahl von Wörtern erinnert wurde. Es ist zu erkennen, dass eine mittlere Zahl erinnerter Adjektive wahrscheinlicher ist als eine extrem hohe oder niedrige. Alle drei Maße der zentralen Tendenz (Median, Modus, arithmetisches Mittel) scheinen sich in gegenseitiger Nähe zu befinden.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bei der Abb. 2.1 handelt es sich um eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass

- alle Werte auf der x-Achse getrennt voneinander stehen,
- jedem einzelnen Wert eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist.

Die erfasste abhängige Variable kann nur Werte in Form ganzer Zahlen annehmen – schließlich ist es nicht möglich 2,5 Adjektive zu erinnern. Auf der x-Achse stehen in diesem Diagramm also nur ganze Zahlen, denen jeweils eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, 14 Wörter zu erinnern, $p(14) = 0{,}06$.

Was wäre mit dem Histogramm geschehen, wenn wir keine Einzelpersonen, sondern Gruppen von beispielsweise zehn Versuchspersonen untersucht hätten? Die Gruppen hätten Werte erzielt, die auf mehrere Stellen nach dem Komma berechnet werden können. Das Histogramm hätte also für jede untersuchte Gruppe einen Balken dargestellt, der das spezifische Gruppenergebnis genau dargestellt hätte, ohne Bindung an ganze Zahlen. Je mehr Gruppen wir untersucht hätten, desto mehr und dichter stehende Balken hätte das Histogramm gezeigt. Stellen Sie sich vor, wir hätten unendlich viele dieser Gruppen untersucht und ihre Werte in einem Koordinatensystem abgetragen: Aus der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung wäre eine kontinuierliche geworden. Das bedeutet, dass eine solche Verteilung stetig ist. Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen die beliebig genaue Berechnung des abgetragenen Kennwerts zu, in diesem Fall die relative Häufigkeit erinnerter Adjektive. Auf der x-Achse stehen also neben den ganzen Zahlen unendlich viele Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen. Anstelle der einzelnen Balken für bestimmte Zahlen entsteht eine kontinuierliche Kurve.

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeichnen sich dadurch aus, dass

- der Abstand der Werte auf der x-Achse unendlich klein ist,
- einem einzelnen Wert keine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

Ein anderes Beispiel für eine kontinuierliche Variable ist das Gewicht. Zwar wird es zumeist in ganzen Zahlen angegeben, tatsächlich nimmt es aber unendlich viele verschiedene Ausprägungen zwischen diesen ganzen kg-Werten an, z. B. 8,657 kg.

Das Resultat dieses Gedankenexperiments ist eine unimodale und eingipflige Verteilung mit glockenförmigem Verlauf. Sie ist symmetrisch und nähert sich der x-Achse asymptotisch an. Dadurch sind die Werte für Median, Modus und arithmetisches Mittel identisch. Eine solche Verteilung heißt Normalverteilung.

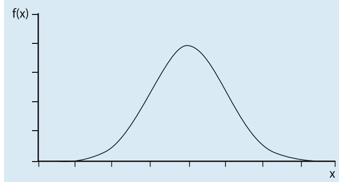

Abb. 2.2 Die Normalverteilung

Der Entdecker der Normalverteilung heißt Carl Friedrich Gauss. Sein Porträt war früher auf jedem Zehn-Mark-Schein abgebildet. Dort fand sich auch die mathematische Funktion der Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Obwohl die am Rand abgebildeten Kurven in Abb. 2.2, Abb. 2.3 und Abb. 2.4 sehr unterschiedlich sind, handelt es sich ausnahmslos um Normalverteilungen, denn die oben genannten Bedingungen sind bei allen gewahrt: Sie verlaufen glockenförmig, sind symmetrisch und die drei Maße der zentralen Tendenz fallen zusammen.

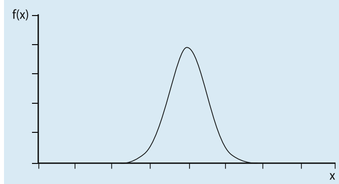

Abb. 2.3 Normalverteilung mit kleiner Streuung

Welche Determinanten legen die Form einer Normalverteilung fest, sodass sie eindeutig identifizierbar ist? Jede Normalverteilung ist durch ihr arithmetisches Mittel und ihre Streuung vollständig determiniert. Das arithmetische Mittel ist leicht zu lokalisieren, da es mit dem Hochpunkt identisch ist. Die Streuung zeigt sich im Abstand der Wendepunkte vom Mittelwert (Wendepunkte sind die Punkte, an denen sich die Krümmung der Kurve umkehrt). Zwei Normalverteilungen mit derselben Streuung und demselben arithmetischem Mittel sind folglich identisch.

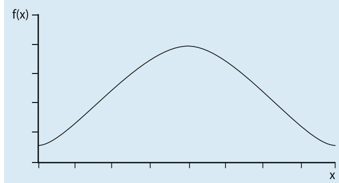

Abb. 2.4 Normalverteilung mit großer Streuung

Der Mittelwert einer theoretischen Verteilung wie der unseres Gedankenexperiments (bei dem theoretisch unendlich viele Gruppen von jeweils zehn Versuchspersonen teilgenommen haben) heißt μ, die Streuung σ. Würden alle gesunden erwachsenen Menschen, also die gesamte Population, an diesem Gedächtnistest teilnehmen, entstünde eine Kurve, die sich der Normalverteilung annähert. Mittelwert und Streuung dieser Verteilung heißen μ und σ.

Die Determinanten einer Normalverteilung:
- Populationsmittelwert μ
- Streuung σ

Der Mittelwert der Häufigkeitsverteilung aus dem Gedächtnisexperiment (Abb. 2.1) beträgt 10,07 und die Streuung 4,37. Eine Normalverteilung mit diesen Werten (Abb. 2.5) ähnelt wie erwartet dem Diagramm der Häufigkeitsverteilung in Abb. 2.1.

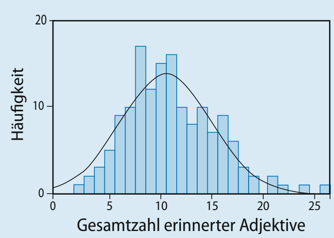

Abb. 2.5 Normalverteilung mit $\mu = 10{,}07$ und $\sigma = 4{,}37$

2.1.2 Wahrscheinlichkeiten unter der Normalverteilung

Die Enden jeder Normalverteilung sind Asymptoten der x-Achse. Sie nähern sich ihr an, ohne sie jemals zu berühren. Die Kurve kann also jede mögliche Ausprägung des gemessenen Merkmals abbilden. Flächen, die unter Verteilungen liegen, stellen Wahrscheinlichkeiten dar. Jede Wahrscheinlichkeit nimmt eine gewisse Fläche ein, die Gesamtfläche entspricht demzufolge einer Wahrscheinlichkeit von 1, da jeder mögliche empirische Wert unter dieser Kurve liegt. Aus der Symmetrie der Normalverteilung folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, einen größeren Wert als den Mittelwert zu messen, $p = 0{,}5$ ist. Eine von Carl Friedrich Gauss gefundene Formel (▶ Abschn. 2.1.1) erlaubt die Wahrscheinlichkeitsberechnung beliebiger Intervalle unter der Kurve. Da eine Kurve aus unendlich vielen Punkten besteht, ist die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Wert unendlich klein. Deshalb sind Wahrscheinlichkeitsberechnungen nur für Flächen, also Intervalle unter der Kurve möglich, niemals für einzelne Werte.

Flächen unter Normalverteilungen stellen Wahrscheinlichkeiten dar.

Für Normalverteilungen gilt, dass die Fläche, die von ± einer Standardabweichung vom Mittelwert begrenzt wird, mehr als ⅔ aller Fälle (68,26 %) beinhaltet

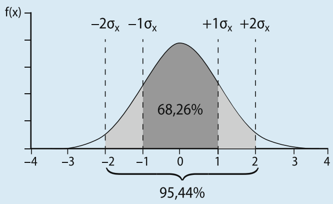

Abb. 2.6 Wahrscheinlichkeiten unter einer Normalverteilung

(Abb. 2.6). 95,44 % liegen im Bereich von ± zwei Standardabweichungen. Wenn also der Mittelwert einer Normalverteilung $\mu = 50$ ist und die Streuung $\sigma = 7$, so liegen etwa 68 % der Fälle im Bereich von 43 bis 57. Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert abweicht, kleiner als 100 % – 68 % = 32 %.

Für die Sozialwissenschaften sind diese Erkenntnisse von großer Bedeutung, denn mit ihrer Hilfe ist es möglich, einen empirischen Wert an der dazugehörigen Normalverteilung zu relativieren und sein prozentuales Vorkommen unter der Kurve abzuschätzen (bzw. eines gewissen Bereiches um ihn herum). Ein Psychologe muss beispielsweise beurteilen können, ob ein gemessener Angstwert eines Patienten ein ungewöhnliches oder ein ganz alltägliches Ausmaß hat.

Wie groß war z. B. die Wahrscheinlichkeit, in dem Gedächtnisexperiment 19 oder mehr Adjektive zu erinnern? Die Fläche unter der Kurve in dem Rechteck in Abb. 2.7 zeigt die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Sie liegt mehr als zwei Standardabweichungseinheiten vom Mittelwert entfernt, deshalb ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit, 19 oder mehr Adjektive zu erinnern, von kleiner als 2,5 %.

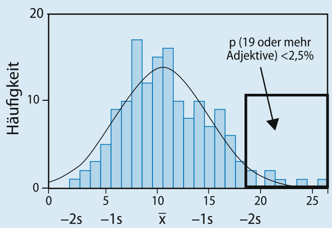

Abb. 2.7 Die Wahrscheinlichkeit, 19 oder mehr Adjektive zu erinnern

Die Standardnormalverteilung hat den Mittelwert 0 und eine Streuung von 1.

2.2 Die Standardnormalverteilung

Eine Normalverteilung ist eine symmetrische glockenförmige Kurve, die sich der x-Achse asymptotisch nähert und deren Median, Modus und arithmetisches Mittel zusammenfallen. Zwei Merkmale beschreiben eine Normalverteilung vollständig: ihr arithmetisches Mittel und ihre Streuung. Unter den unendlich vielen Normalverteilungen gibt es eine mit dem Mittelwert $\mu = 0$ und der Streuung $\sigma = 1$. Diese wird als Standardnormalverteilung bezeichnet. Ihr kommt eine besondere Bedeutung zu, denn jede erdenkliche Normalverteilung ist durch eine einfache Transformation in diese standardisierte Form zu überführen. Dies ist die in ▶ Abschn. 1.4 behandelte z-Transformation nach der Formel:

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Sie ist die Verteilung der z-Werte.

Standardnormalverteilung und z-Verteilung sind also Bezeichnungen für ein- und dieselbe Verteilung. Deren Hochpunkt befindet sich bei 0, die Wendepunkte bei –1 und +1. Da die Streuung der Standardnormalverteilung $\sigma = 1$ beträgt, lassen sich z-Werte hier direkt als Standardabweichungseinheiten vom Mittelwert auffassen. Deshalb sind auf der x-Achse z-Werte abgetragen (Abb. 2.8). Ein z-Wert von 2,5 liegt genau 2,5 Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt.

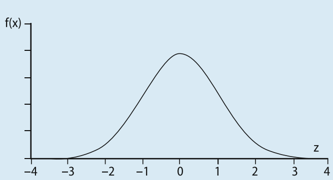

Abb. 2.8 Die Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung macht den Sozialwissenschaftlern das Leben in vielen Bereichen leichter. Mit ihrer Hilfe und den eng mit ihr verknüpften z-Werten ist es problemlos möglich, die Ergebnisse mehrerer, auf unterschiedlichen Normalverteilungen basierender Messinstrumente zu vergleichen. Dies ist z. B. dann nötig, wenn untersucht werden soll, ob zwei verschiedene psychologische Tests wirklich dasselbe Konstrukt messen, oder wenn Umfragedaten fremder Institute, die mit unterschiedlichen Instrumenten arbeiten, untereinander verglichen werden sollen.

2.2.1 Wahrscheinlichkeiten unter der Standardnormalverteilung

Die Fläche unter der Kurve einer Merkmalsverteilung repräsentiert die Wahrscheinlichkeit eins. Jedes mögliche Ergebnis ist unter der Kurve lokalisierbar. Wie bei jeder Normalverteilung liegen unter dem Bereich von ± einer Standardabweichung 68,26 % der Fälle. Also gilt dies ebenso für die standardisierten z-Werte –1 und +1, denn die sind ja als Streuungseinheiten vom Mittelwert zu verstehen. 95,44 % der Fälle liegen zwischen den z-Werten −2 und +2.

Die z-Werte erlauben die genaue Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bestimmter Intervalle unter der Kurve. Anhand der ▶ Tabelle A im Anhang A2 lassen sich diese Wahrscheinlichkeiten leicht ablesen. Jedem z-Wert ist dort eine Fläche unter der Kurve zugeordnet, die dieser z-Wert nach links abschneidet. Diese Fläche ist identisch mit der Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Population zufällig einen Wert zu ziehen, der kleiner oder gleich diesem z-Wert ist. Um die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls zu bestimmen, muss man die Wahrscheinlichkeiten der z-Werte, die die Grenzen des Intervalls festlegen, voneinander subtrahieren. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit für einen z-Wert größer als 1,2: $p = 0{,}1151$, für einen z-Wert kleiner oder gleich 1,2: $p = 0{,}8849$ (Abb. 2.9, Wahrscheinlichkeiten aus ▶ Tabelle A im Anhang A2).

▶ Tabelle A im Anhang A2

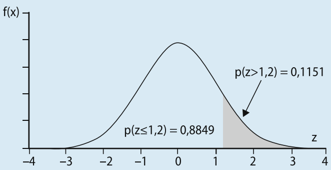

Abb. 2.9 Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines z-Werts

Mithilfe der Standardnormalverteilung ist es nicht nur möglich, dem Bereich ab einem gewissen z-Wert eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, sondern auch direkt gemessenen Werten aus anderen Verteilungen. Diese Werte werden dafür einer z-Standardisierung unterzogen. Es resultiert die Wahrscheinlichkeit, dass ein empirischer Testwert oder ein größerer auftritt. Dieses Prinzip findet z. B. Anwendung bei Intelligenztests.

▶ Tabelle A im Anhang A2

In den Testmanualen sind häufig Prozentrangplätze für bestimmte Testergebnisse angegeben. Prozentrangplätze geben an, wie viel Prozent aller Werte einer irgendwie geformten Verteilung unter einem bestimmten Wert liegen. Sie können anhand der kumulierten Prozentwertverteilung bestimmt werden (▶ Abschn. 1.1.2). Sind die Werte normalverteilt, so lassen sich Prozentränge anhand der Standardnormalverteilung ermitteln. So könnte einem Intelligenzwert von 115 ($\mu = 100$; $\sigma = 15$) ein Prozentrang von 84 zugeordnet werden (▶ Tabelle A im Anhang A2, für $z = 1$).

2.3 Die Stichprobenkennwerteverteilung

In vielen Fällen sind Sozialwissenschaftler am sogenannten Populationsparameter, d. h. am tatsächlichen Wert eines Merkmals in der Population interessiert. Natürlich kann nicht für jede Untersuchung die gesamte Population befragt werden. Erhebungen, die die ganze Population mit einbeziehen, sind sehr aufwendig und daher äußerst selten. Wirklich genau sind aber auch sie nicht, denn die Population ändert sich in jedem Augenblick.

Dies gilt natürlich nur für Fragestellungen, die z. B. alle gesunden erwachsenen Menschen als Population zugrunde legen. Populationen sehr kleiner Größe, etwa die Studierenden in einem Hörsaal, können dagegen durchaus in ihrer Ganzheit untersucht werden.

Das Schließen von einer Stichprobe auf die Population ist nur bei repräsentativen Stichproben erlaubt.

Stattdessen versuchen Wissenschaftler diesen Populationsparameter durch die Erhebung von Stichproben zu schätzen. An dieser Stelle wird der Grund für den Namen dieses Kapitels ganz deutlich: Inferenzstatistik bezeichnet den Schluss von der Stichprobe auf die Population. Aber ist dieses Vorgehen überhaupt erlaubt und statistisch zu rechtfertigen? Ist es zulässig, aus den Daten einer Stichprobe auf Eigenschaften der Population zu schließen? Die Antwort lautet: Ja, sofern die Stichprobe möglichst repräsentativ für die interessierende Population in den interessierenden Merkmalen ist. Wird dies gewahrt, so liefern Stichproben zuverlässige Schätzungen der Populationswerte. Ist die Stichprobe nicht repräsentativ für die Population, so kann es zu Fehlinterpretationen durch Stichprobenfehler kommen (▶ Abschn. 4.1.10).

Wie gut ist nun die mithilfe der Stichprobe vorgenommene Schätzung des Populationswerts? Würde z. B. der Mittelwert von zwei solcher Stichproben anstelle einer einzigen nicht eine viel genauere Schätzung des Populationsmittelwerts abgeben, und der Mittelwert von drei Stichproben eine noch genauere? Die folgenden Überlegungen

► Video »Stichprobenkennwerteverteilung und Standardfehler des Mittelwerts« auf http://www.lehrbuch-psychologie.de

beziehen sich auf das arithmetische Mittel, können aber problemlos auf andere in ► Abschn. 1.3 erörterte Kennwerte übertragen werden.

Stichprobenkennwerteverteilung von Mittelwerten

Nehmen wir einmal an, statt der einen hätten wir theoretisch unendlich viele, gleich große, voneinander unabhängige Stichproben erheben können, die wiederum unendlich viele, unterschiedlich große Stichprobenmittelwerte liefern. Die resultierende Verteilung dieser Mittelwerte ginge mit steigender Anzahl von Werten in eine Normalverteilung über, die sogenannten Stichprobenkennwerteverteilung von Mittelwerten. Sie umfasst alle möglichen Mittelwerte, die aus einer Stichprobe der gegebenen Größe entstehen können. Der Mittelwert dieser Stichprobenkennwerteverteilung von Mittelwerten ($\bar{\bar{x}}$) repräsentiert die Verteilung am besten, denn alle Mittelwerte streuen um ihn herum (► Abschn. 2.1). Deshalb ist bei einer einmaligen Ziehung einer Stichprobe ein Mittelwert in der Nähe von $\bar{\bar{x}}$ wahrscheinlicher als ein Mittelwert, der sehr weit davon entfernt ist. In der Sprache der Statistik heißt $\bar{\bar{x}}$ deshalb auch Erwartungswert von $\bar{x}$ ($E(\bar{x})$). Man kann zeigen, dass dieser Erwartungswert gleich dem Populationsmittelwert μ ist. Es gilt also $E(\bar{x}) = \mu$ (Beweis siehe Bortz und Schuster, 2010, Anhang A, S. 529). Jeder Mittelwert, der einer solchen Stichprobenkennwerteverteilung entstammt, wird als erwartungstreuer Schätzer ˆ des Populationsparameters μ bezeichnet: $\bar{x} = $ ˆ.

Der Mittelwert einer Stichprobe ist ein erwartungstreuer Schätzer des Populationsmittelwerts.

Das Dach über μ zeigt an, dass dies ein geschätzter Wert ist (► Abschn. 1.3.4). Generell sind alle die Kennwerte erwartungstreue Schätzer, deren Kennwerteverteilungen den jeweiligen Populationsparameter als Mittelwert haben.

2.3.1 Der Standardfehler des Mittelwerts

Der Standardfehler des Mittelwerts gibt die Genauigkeit der Schätzung des Populationsmittelwerts an.

Die Tatsache, dass der Erwartungswert der Stichprobenkennwerteverteilung gleich dem Populationsmittelwert μ ist, eröffnet die Möglichkeit für eine beliebig genaue Schätzung eben dieses Werts, um den herum sich die Kennwerte symmetrisch verteilen. Doch wie wir in ► Abschn. 2.1 gesehen haben, ist jede Normalverteilung nicht nur durch ihr arithmetisches Mittel, sondern auch durch ihre Streuung charakterisiert. Die Wahrscheinlichkeit, eine gute Schätzung durch einmalige Ziehung einer Stichprobe zu erlangen, ist offensichtlich umso höher, je kleiner die Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung ist. Die Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung heißt Standardfehler des Mittelwerts. Mit seiner Hilfe lässt sich die Genauigkeit der Schätzung des Populationsmittelwerts beurteilen. Er ist definiert als die Streuung in einer Verteilung von Mittelwerten aus gleich großen Zufallsstichproben einer Population:

Der Standardfehler des Mittelwerts

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Je größer die Populationsstreuung ist, desto größer ist der Standardfehler des Mittelwerts.

Wovon hängt die Größe des Standardfehlers ab? Zum einen ist die Streuung der Messwerte in der Population ausschlaggebend für die Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung: Hätten alle Menschen dieselbe Merkmalsausprägung, so wäre natürlich sowohl die Streuung in der Population als auch die der Stichprobenkennwerteverteilung gleich null. Der Standardfehler wird also zwangsläufig umso größer, je größer auch die Streuung der Messwerte in der Population ist. Die Populationsstreuung steht in der Formel im Zähler (siehe Formel).

Beispiel: Hätten alle Menschen einen identischen Grad an Intelligenz, dann hätten alle Menschen einen Intelligenzquotienten von exakt 100 und der Standardfehler des Mittelwerts wäre gleich null. Da die Menschen aber unterschiedlich intelligent sind und somit der Intelligenzquotient in der Bevölkerung eine gewisse Varianz (und Streuung) aufweist, wird ihr Populationsmittelwert zwar erwartungstreu geschätzt, den exakten Wert wird aber nie jemand wissen.

Zum anderen wirkt sich der Stichprobenumfang auf den Standardfehler aus (siehe Formel). Je größer die Stichprobe ist, desto genauer wird auch ihre Schätzung sein.

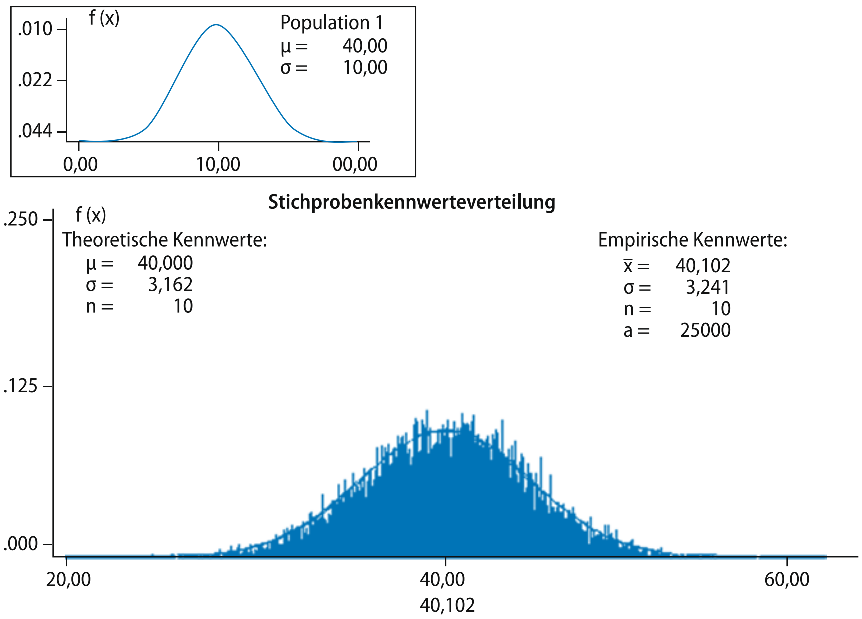

Abb. 2.10 Computersimulation einer Stichprobenkennwerteverteilung mit der Stichprobengröße $n = 10$

Daraus lässt sich ableiten, dass die Mittelwerte bei großen Stichproben weniger streuen als bei kleinen Stichproben. Dadurch steigt die Chance, mit der Schätzung sehr nahe an dem wirklichen Populationsmittelwert zu liegen. Dies verdeutlichen die Computersimulationen sehr anschaulich (Abb. 2.10 und Abb. 2.11). Dort sind sehr viele Zufallsstichproben einer bestimmten Größe gezogen und die resultierende Stichprobenkennwerteverteilung dargestellt. Der Vergleich zweier solcher Verteilungen mit unterschiedlichem Stichprobenumfang macht dessen Bedeutung verständlich (Maßstäbe der x-Achse beachten).

Je größer die Stichprobe ist, desto kleiner ist der Standardfehler des Mittelwerts.

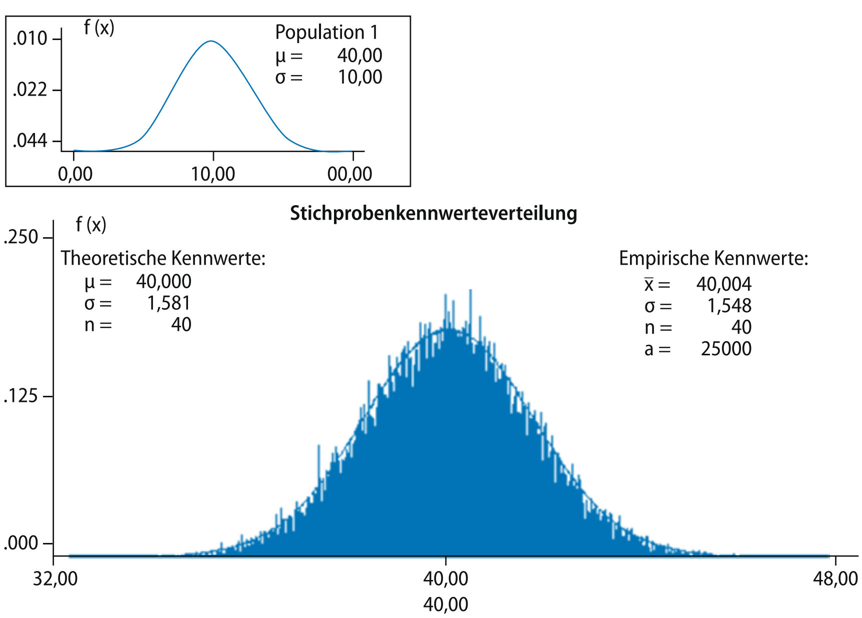

Abb. 2.11 Computersimulation einer Stichprobenkennwerteverteilung mit der Stichprobengröße $n = 40$

2

Wenn die Größe des Standardfehlers entscheidend die Güte der Mittelwertsschätzung beeinflusst, ist es von Vorteil, auch den Standardfehler zu schätzen. Wie oben ausgeführt ist er proportional zur Populationsstreuung und verringert sich bei zunehmendem Stichprobenumfang. Mathematisch berechnet er sich wie folgt:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Schätzung des Standardfehlers

Noch einmal: Ein Mittelwert stellt eine umso präzisere Schätzung des Populationsparameters μ dar, je kleiner sein Standardfehler ist.

► Video »Stichprobenkennwerteverteilung und Standardfehler des Mittelwerts« auf http://www.lehrbuch-psychologie.de

Ein großer Vorteil ist, dass die Daten einer Stichprobe ausreichen, um die Größe des Standardfehlers zu schätzen. Aufgrund einer Stichprobe können wir deshalb nicht nur den Mittelwert der Population schätzen, sondern mithilfe des Standardfehlers auch die Genauigkeit dieser Schätzung bestimmen. Die Bewertung erfolgt mithilfe unserer Kenntnisse über die Wahrscheinlichkeiten unter einer Normalverteilung (► Abschn. 2.1.2): Im Bereich von ± einem Standardfehler vom Stichprobenmittelwert liegen 68,26 %, zwischen ± zwei Standardfehlern 95,44 % aller möglichen Populationen mit ihrem jeweiligen Populationsmittelwert, aus denen die Stichprobe stammen könnte. Anders ausgedrückt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,26 % liegt der wahre Populationsmittelwert zwischen ± einem Standardfehler. Ein solcher Bereich heißt Vertrauensintervall oder Konfidenzintervall des Mittelwerts. Es ist ein Maß für die Präzision, mit der ein Stichprobenkennwert den »wahren« Populationsparameter schätzt.

Ein Konfidenzintervall gibt die Präzision eines Stichprobenergebnisses an.

► Tabelle A im Anhang A2

In der Praxis wird per Konvention meist ein Konfidenzintervall von 95 % oder 99 % bestimmt. Eine solche Berechnung erfordert den Rückgriff auf die Wahrscheinlichkeiten in einer Standardnormalverteilung. Da ein Konfidenzintervall symmetrisch um einen Mittelwert konstruiert wird, müssen wir auf den beiden Seiten der Verteilung jeweils 2,5 % bzw. 0,5 % abschneiden, um einen Wahrscheinlichkeitsbereich von 95 % oder 99 % zu erhalten. Ein z-Wert von –1,96 (–2,58) schneidet 2,5 % (0,5 %) nach links ab, ein Wert von 1,96 (2,58) schneidet denselben Bereich nach rechts ab (► Tabelle A im Anhang A2, bitte nachschauen). Aufgrund der Symmetrie der z-Verteilung genügt es, den Betrag von einem der beiden z-Werte zu bestimmen. Dieser Betrag muss mit dem Standardfehler des Mittelwerts multipliziert werden. Das Ergebnis wird zum Mittelwert addiert bzw. vom Mittelwert subtrahiert, um die beiden Grenzen des Konfidenzintervalls zu erhalten:

$$\text{untere Grenze } = \bar{x} - z \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$$
$$\text{oberer Grenze } = \bar{x} + z \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

Bestimmung eines Konfidenzintervalls um den Mittelwert

► Tabelle B im Anhang A2

- Für ein 95%-Konfidenzintervall: $z = 1{,}96$
- Für ein 99%-Konfidenzintervall: $z = 2{,}58$

Bei kleinen Stichproben ($N < 30$) ist allerdings die Normalverteilungsannahme häufig verletzt (siehe Bortz und Schuster, 2010, S. 87). Das korrekte Konfidenzintervall ist in diesem Fall etwas größer, als die Berechnung über z-Werte angibt. Hier empfiehlt es sich, anstatt des z-Werts den zugehörigen Wert der t-Verteilung (bei $df = n - 1$) zu ermitteln, der 2,5 % bzw. 0,5 % nach oben bzw. unten abschneidet. Die t-Verteilung wird in ► Abschn. 3.1.4 erklärt, die t-Werte sind der ► Tabelle B im Anhang A2 zu entnehmen.

Wie lautet das 95%-Konfidenzintervall zu folgendem Ergebnis?

$$\bar{x} = 15;\ \hat{\sigma} = 5;\ n = 64$$

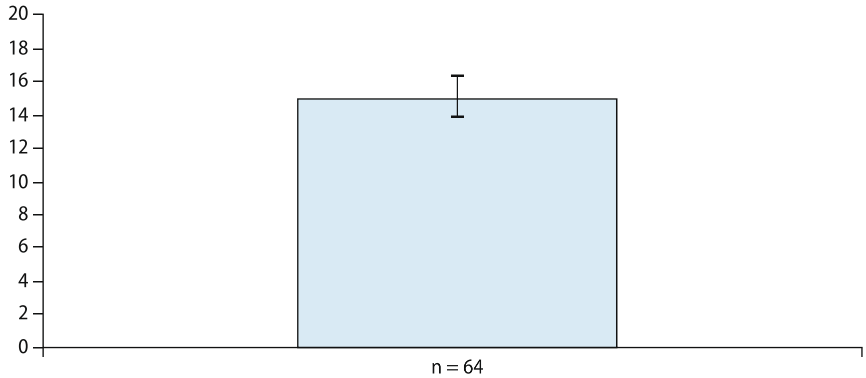

Abb. 2.12 Mittelwert mit Fehlerbalken (95%-Konfidenzintervall)

Zuerst schätzt man den Standardfehler:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{64}} = 0{,}625$$

$$\text{untere Grenze des Konfidenzintervalls} = \bar{x} - z \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} = 15 - 1{,}96 \cdot 0{,}625 = 13{,}775$$
$$\text{obere Grenze des Konfidenzintervalls} = \bar{x} + z \cdot \hat{\sigma}_{\bar{x}} = 15 + 1{,}96 \cdot 0{,}625 = 16{,}225$$

Das 95%-Konfidenzintervall um den Mittelwert 15 lautet [13,775; 16,225]. Der Mittelwert stammt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% aus einer Population, deren Mittelwert μ zwischen 13,775 und 16,225 liegt. Ein Konfidenzintervall wird grafisch anhand eines Fehlerbalkens dargestellt (Abb. 2.12).

In den ergänzenden Dateien auf der Internetseite dieses Buches finden Sie eine Erläuterung zur Bestimmung der Konfidenzintervalls mit SPSS sowie dessen grafischer Darstellung.

► Erläuterung zur Bestimmung der Konfidenzintervalls mit SPSS auf http://www.lehrbuch-psychologie.de

Zusammenfassung
Dieses Kapitel beschäftigte sich zunächst mit der sehr wichtigen Annahme der Normalverteilung, der sehr viele Merkmale in der Bevölkerung folgen. Alle Normalverteilungen sind durch ihren glockenförmigen Verlauf gekennzeichnet und durch die Tatsache, dass Modus, Median und arithmetisches Mittel auf einen Punkt fallen. Sie sind daher symmetrisch. Flächen unter einer Normalverteilung stellen Wahrscheinlichkeiten dar. Die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Punkt ist unendlich klein, da jede Kurve aus unendlich vielen Punkten besteht.
Die Standardnormalverteilung (z-Verteilung) ist ein Spezialfall der Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Auf ihrer Abszisse sind die z-Werte abgetragen, denn es handelt sich um die aus einer z-Standardisierung resultierende Verteilung. So ist es möglich, Daten zu vergleichen, die aus ursprünglich unterschiedlichen Normalverteilungen stammen.
Empirische Sozialwissenschaftler schätzen mithilfe von Stichproben die Populationskennwerte, da es meist nicht praktizierbar ist, die gesamte Population zu befragen. Die Stichprobenkennwerteverteilung umfasst alle möglichen Mittelwerte einer bestimmten Stichprobengröße. Ihr Mittelwert ist mit dem Populationsmittelwert μ identisch. Deshalb wird jeder Wert aus dieser Verteilung als erwartungstreuer Schätzer des Populationswerts bezeichnet, auch wenn zwischen den beiden Werten unter Umständen eine große Diskrepanz besteht.

▼

Ob zwischen dem Populationsparameter und seinem Schätzer tatsächlich eine solche Diskrepanz besteht, hängt wesentlich von der Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung ab. Sie wird Standardfehler genannt. Die Größe des Standardfehlers hängt von zwei Faktoren ab: Zum einen ist er umso kleiner, je kleiner die Streuung des Merkmals in der Population ist. Zum anderen verringert er sich mit zunehmender Stichprobengröße. Je kleiner der Standardfehler ist, desto besser ist auch die Schätzung des Populationsmittelwerts durch den Mittelwert der Stichprobe.
Der Standardfehler eignet sich außerdem zur Konstruktion von Konfidenzintervallen. Ein Konfidenzintervall gibt den Bereich von Populationsparametern an, aus dem ein empirisch gefundenes Ergebnis, z. B. ein Mittelwert, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (per Konvention meist 95 % oder 99 %) stammt. Damit lässt sich die Präzision eines Ergebnisses anschaulich beurteilen.

2.4 Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 1
Wie viele und welche Merkmale sind nötig, um eine Normalverteilung vollständig zu beschreiben?

Aufgabe 2
Bestimmen Sie den z-Wert einer Standardnormalverteilung,
a. oberhalb dessen 20 Prozent der Werte liegen.
b. unterhalb dessen 65 Prozent der Werte liegen.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Fälle bei einer Normalverteilung und bei einer Standardnormalverteilung in dem Bereich »Mittelwert ± 1,5 Standardabweichungseinheiten« liegen.

Aufgabe 4
In zwei Untertests eines Intelligenz-Struktur-Tests erzielt Mario die Werte $x_1 = 12$ und $x_2 = 23$.

$$\mu_1 = 10 \quad \mu_2 = 20$$
$$\sigma_1 = 2 \;\; ; \; \sigma_2 = 3$$

Hat Mario in beiden Tests »gleich gut« abgeschnitten?

Aufgabe 5
Ein Firmenchef möchte nur sehr intelligente Bewerber einstellen, nämlich nur solche, die in den oberen 5 % der Population liegen. Wie groß muss der IQ-Wert einer Person in einem Intelligenztest mindestens sein, um bei ihm einen Job zu bekommen?
(Intelligenztest: $\mu = 100$, $\sigma = 15$)

Aufgabe 6
Ein Test für Extraversion hat den Populationsmittelwert von $\mu = 15$ und eine Populationsstreuung von $\sigma = 2$.
a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Versuchsperson in diesem Test einen Wert von 10 oder weniger bekommt?

b. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Versuchsperson einen Wert zwischen 13 und 17 erhält?
c. Ab welchem Wert kann man jemanden als außergewöhnlich extravertiert bezeichnen?
d. Ab welchem Mittelwert kann man eine Gruppe von 4 Leuten als außergewöhnlich extravertiert bezeichnen?

http://www.springer.com/978-3-662-43523-6

Quantitative Methoden 1
Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler
Rasch, B.; Friese, M.; Hofmann, W.; Naumann, E.
2014, XIII, 170 S. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-662-43523-6