wird der β-Fehler bei sonst gleichen Größen, denn umso **größer** wird auch die Streuung der **Stichprobenkennwerte**verteilung. Je größer der interessierende Populationseffekt ist, desto **größer** wird die Teststärke. Die Teststärke gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der man ein signifikantes Ergebnis **findet**, falls ein Populationseffekt einer bestimmten Größe **existiert**. Auch das α-Niveau spielt hier eine Rolle, denn je strenger man dieses festlegt, desto **kleiner** wird die Teststärke.

Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1

a. Der Test muss einseitig durchgeführt werden, denn die inhaltliche Hypothese besagt ja ganz explizit: »Gruppe 1 sollte höhere Punktzahlen erreichen als Gruppe 2.«
b. Die statistische Alternativhypothese ist hier relevant: $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$
c. Die empirische Mittelwertsdifferenz sollte eher positiv sein.
d. Die Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung würde kleiner werden.

Aufgabe 2

a. Relevant ist hier die Differenz der gemittelten Werte des Therapieerfolgs pro Gruppe.
b. Diese Mittelwertsdifferenz sollte theoretisch null betragen, die Nullhypothese ist also die relevante Hypothese. Für die Prüfung der Nullhypothese ist immer ein zweiseitiger Test erforderlich.

Aufgabe 3

Hier muss gar nichts gerechnet werden, denn das empirische Ergebnis spricht bereits gegen die Richtung der Alternativhypothese. (Theoretisch wird eine positive Mittelwertsdifferenz angenommen, aber die empirische Mittelwertsdifferenz ist negativ!)

Aufgabe 4

a.

$$\text{Mittelwert: } \begin{matrix} \bar{x}_1 = 3{,}6 \\ \bar{x}_2 = 6{,}6 \end{matrix} \quad \text{und Streuung: } \begin{matrix} \hat{\sigma}_1 = 1{,}14 \\ \hat{\sigma}_2 = 1{,}67 \end{matrix}$$

b. Ungerichtete statistische Hypothese: $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$
Berechnung des t-Werts:

$$t_{(df=8)} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1}}} \Rightarrow t_{(df=8)} = \frac{6{,}6 - 3{,}6}{\sqrt{\frac{1{,}67^2}{5} + \frac{1{,}14^2}{5}}} = \frac{3}{0{,}9} = 3{,}33$$

$\Rightarrow t_{\text{krit(df=8)}} = 2{,}31$ (▶ Tabelle B im Anhang A2, Spalte für 0,975, da ungerichtete Hypothese). Der empirische t-Wert ist größer als der kritische t-Wert, die Mittelwerte unterscheiden sich signifikant voneinander ($p_{zweiseitig} < 0{,}05$).

▶ Tabelle B im Anhang A2

Aufgabe 5

a. Statistische Hypothese (einseitige Fragestellung): $\mu_{\text{pos}} - \mu_{\text{neg}} > 0$
Berechnung des t-Werts:

$$t_{(df=51)} = \frac{\bar{x}_{pos} - \bar{x}_{neg}}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_{pos} - \bar{x}_{neg}}} = \frac{\bar{x}_{pos} - \bar{x}_{neg}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_{pos}}{n_{pos}} + \frac{\hat{\sigma}^2_{neg}}{n_{neg}}}} \Rightarrow t_{(df=51)} = \frac{6{,}8 - 5{,}9}{\sqrt{\frac{3{,}2}{25} + \frac{3{,}8}{28}}} = \frac{0{,}9}{0{,}51} = 1{,}76$$

Wahrscheinlichkeit des t-Werts unter der Nullhypothese: $p < 0{,}05$ ($t_{krit(df=40)} = 1{,}684$)

⇒ Die Nullhypothese kann verworfen werden; die Filme haben einen Einfluss auf die Stimmung.

b. Berechnung des empirischen Effekts aus den Daten:

$$f^2 = \frac{t^2 - 1}{N} = \frac{1{,}76^2 - 1}{53} = 0{,}040$$
$$\omega^2 = \frac{f^2}{f^2 + 1} = \frac{0{,}04}{0{,}04 + 1} = 0{,}038$$

⇒ Die Unterschiede in den Filmen erklären 3,8 % der Gesamtvarianz in der Stimmung der Versuchspersonen.

c. Stichprobenumfangsplanung:

$$\lambda_{90\%} = 8{,}56 \;\Rightarrow\; N = \frac{\lambda_{\text{Teststärke}}}{\Phi^2} = \frac{\lambda_{\text{Teststärke}}}{\frac{\Omega^2}{1-\Omega^2}} = \frac{8{,}56}{\frac{0{,}05}{1-0{,}05}} = 162{,}64 \approx 164$$

⇒ Der Forscher hätte eigentlich 82 Personen pro Gruppe benötigt, um einen Effekt der Größe $\Omega^2 = 0{,}05$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % zu finden.

▶ Tabelle B im Anhang A2

Aufgabe 6

a. Ungerichtete Fragestellung: $t_{krit(df=120)} = 1{,}98$ (▶ Tabelle B im Anhang A2, Spalte für 0,975). Das Ergebnis ist auf dem 5%-Niveau signifikant ($p_{zweiseitig} < 0{,}05$), die H_0 kann abgelehnt werden.

b. Empirisches Effektstärkenmaß ω^2 ausrechnen:

$$f^2 = \frac{t^2 - 1}{N} = \frac{(4{,}88)^2 - 1}{160} = 0{,}14259 \Rightarrow \omega^2 = \frac{f^2}{1 + f^2} = 0{,}1248$$

Da der empirische Effekt etwa 12,5 % beträgt und der Untersucher bereits einen Effekt von 10 % akzeptiert, kann das Ergebnis als »inhaltlich bedeutsam« angesehen werden.

Aufgabe 7

a. H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq 0$
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$; die H_1 ist hier relevant.

b. Schritte:
1. Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung berechnen.
2. t-Wert unter der Nullhypothese bestimmen.
3. Wahrscheinlichkeit für diesen Wert berechnen bzw. Vergleich mit t_{krit}.

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{608400}{21} + \frac{672400}{21}} = \sqrt{60990{,}5} \approx 247$$
$$t_{df=40} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{-1157 - 0}{247} = -4{,}68$$
$$t_{krit(df=40)} = 1{,}684$$

c. Das Ergebnis ist signifikant, denn die Differenz der Mittelwerte geht in die vorhergesagte Richtung und der Betrag des empirischen t-Werts ist größer als der Betrag des kritischen t-Werts. Die Wahrscheinlichkeit, dass man sich irrt, wenn man die H_0 hier ablehnt, ist deshalb kleiner als das festgesetzte α-Niveau von 5 %. Man entscheidet sich also dafür, einen Effekt gefunden zu haben. Nun muss nur noch berechnet werden, wie groß der gefundene Effekt ist. Gemäß des Rechenwegs (vgl. ▶ Aufgabe 5b) erhält man $\omega^2 \approx 0{,}33$. Der geschätzte Populationseffekt beträgt hier etwa 33 %. Das ist ziemlich beachtlich: 33 % der Unterschiede in den

Gewichtsdifferenzen der Zwillinge werden durch die Enge der genetischen Verwandtschaft erklärt.

Aufgabe 8

$f^2 = 0{,}069$; $\omega^2 = 0{,}0645 \approx 6{,}5\,\%$ (Rechenweg: ▶ Aufgabe 5b)

Aufgabe 9

a. Er muss berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit war, ein signifikantes Ergebnis zu erhalten, falls ein Effekt von $\Omega^2 \geq 0{,}2$ in der Population wirklich existiert hätte.
   Schritte:
   1. λ aus Ω^2 und N berechnen.
   2. Aus der richtigen Tabelle die Teststärke für diesen λ-Wert ermitteln:

$$\lambda = \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} \cdot N = \frac{0{,}2}{0{,}8} \cdot 62 = 15{,}5$$

Hier: einseitiger Test, α-Niveau: 5 %, also ist die λ-Tabelle TPF-7 (▶ Tabelle C im Anhang A2) relevant. Aus ihr wird bei FG(Z) = 1 für λ = 15,5 eine Teststärke von etwa 99 % ermittelt.

▶ Tabelle C im Anhang A2

b. Eine Teststärke von 99 % besagt: »Wenn es einen Effekt von $\Omega^2 \geq 0{,}2$ in der Population gegeben hätte, dann hätte ich in meinem Experiment mit 99%-iger Sicherheit ein signifikantes Ergebnis erhalten.« Anders ausgedrückt: »Die Wahrscheinlichkeit, dass ich mich irre, wenn ich jetzt die H_0 annehme, beträgt nur etwa 1 %.« Somit kann die H_1 verworfen werden! Allerdings werden mit der berechneten Wahrscheinlichkeit nur Effekte der Größe $\Omega^2 \geq 0{,}2$ ausgeschlossen. Es ist durchaus möglich, dass kleinere Effekte in der Population existieren.
c. Für größere Populationseffekte ist die Teststärke eines Tests höher. Wenn ein Effekt der Größe $\Omega^2 = 0{,}2$ mit 99%-iger Sicherheit ausgeschlossen werden kann, dann kann die Existenz von größeren Effekten mit einer noch höheren Sicherheit verneint werden.
d. Wenn der Wissenschaftler ein α-Niveau von 10 % akzeptiert hätte, wäre das Testergebnis signifikant geworden, d. h., er hätte sich gegen die H_0 entscheiden müssen.

Aufgabe 10

Schritte:
1. α und β festlegen und mit ihnen die richtige Tabelle bestimmen.
2. λ aus der richtigen Tabelle ablesen.
3. Ω^2 in Φ^2 umrechnen.
4. λ und Φ^2 in die Formel zur Berechnung von n einsetzen.

Hier: zweiseitiger Test, α-Niveau: 5 %, also ist ▶ Tabelle C im Anhang A2 (TPF 6) hier relevant. Für eine Teststärke von 95 % liest man bei FG(Z) = 1 einen Wert von λ = 13 ab.

▶ Tabelle C im Anhang A2

$$\Phi^2 = \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} = \frac{0{,}15}{0{,}85} \approx 0{,}176 \quad \text{n mit } \lambda \text{ und } \Phi^2 \text{ ausrechnen:}$$

$$N = \frac{\lambda}{\Phi^2} = \frac{13}{0{,}176} \approx 73{,}86 => n = \frac{73{,}86}{2} = 36{,}93$$

Pro Gruppe müssen also 37 Versuchspersonen untersucht werden, um mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit ein signifikantes Ergebnis zu finden, falls ein Populationseffekt von 15 % (oder größer) wirklich existiert. Insgesamt würden demnach 74 Personen für dieses Experiment benötigt.

▶ Tabelle C im Anhang A2

Aufgabe 11

Berechnung der Teststärke (Lösungsweg: ▶ Aufgabe 9a). Für $\lambda = 4{,}21$ ergibt sich in ▶ Tabelle C im Anhang A2 (TPF 3) eine Teststärke von < 50 %. Bei einem nicht signifikanten Ergebnis kann sie bei einer so geringen Teststärke bzw. bei einer β-Fehlerwahrscheinlichkeit von über 50 % keine Entscheidung für die Nullhypothese treffen. Die Versuchspersonenanzahl ist für seine Untersuchung zu gering. Es ist nicht auszuschließen, dass ein Effekt der Größe 5 % in der Population vielleicht doch existiert.

Aufgabe 12

Um ein signifikantes Ergebnis bewerten zu können, muss der empirische Effekt aus den Daten berechnet werden.

$$f^2 = \frac{t^2 - 1}{N} = \frac{1{,}96^2 - 1}{300} = 0{,}009\ ;\ \omega^2 = \frac{f^2}{1 + f^2} = \frac{0{,}009}{1 + 0{,}009} = 0{,}009$$

Der empirische Effekt des Medikaments im Vergleich zu einem Placebo ist kleiner als 1 %. Sie sollten ihrem Freund raten, das Medikament nicht zu kaufen.

Aufgabe 13

a. Statistische Hypothesen für einen *t*-Test für abhängige Stichproben (einseitig, nachher – vorher):
   H_0: $\mu_d \le 0$
   H_1: $\mu_d > 0$ inhaltlich relevant
b. Kennwert und Streuung des Kennwerts: $\bar{x}_d = 1{,}6\ ;\ \hat{\sigma}_d = 1{,}65$

   Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung: $\hat{\sigma}_{\bar{x}_d} = \frac{\hat{\sigma}_d}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}65}{\sqrt{10}} = 0{,}52$

c. *t*-Test für abhängige Stichproben:

$$t_{df=9} = \frac{\bar{x}_d}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_d}} = \frac{1{,}6}{0{,}52} = 3{,}07 \ \Rightarrow p < 0{,}01;\ t_{krit(df=9)} = 1{,}83$$

Das Ergebnis ist signifikant. Die Meditation hat einen positiven Einfluss auf die Zufriedenheit der Patienten.

Lösungen zu Kapitel 4

Verständnisfragen

a. Ein positiver Zusammenhang bedeutet, dass die Werte auf beiden Variablen in gleicher Weise variieren (vom Mittelwert abweichen), d. h. überdurchschnittliche Werte auf *x* entsprechen überdurchschnittlichen Werten auf *y*, während unterdurchschnittliche Werte auf *x* mit unterdurchschnittlichen Werten auf *y* einhergehen. Beispiel: Aufmerksamkeit und Erinnerung.
   Ein negativer Zusammenhang tritt auf, wenn hohe Werte auf der einen Variable mit niedrigen Werten auf der anderen einhergehen und umgekehrt.
   Beispiel: Angst und Selbstsicherheit.
   Kein Zusammenhang existiert, wenn beide Variablen unsystematisch miteinander variieren, d. h., es lässt sich kein Trend feststellen. Beispiel: Schuhgröße und Introversion.
b. Der Korrelationskoeffizient ist der Quotient aus empirischer Kovarianz und maximaler Kovarianz. Die maximale Kovarianz entspricht dem Produkt der beiden Merkmalsstreuungen. Der Korrelationskoeffizient ist aufgrund der Relativierung maßstabsunabhängig (standardisiert) und hat einen festen Wertebereich (–1 bis