b. Die Intervallskalenqualität der unabhängigen Variable ist zweifelhaft. Das Merkmal folgt in der Population keiner Normalverteilung. Die Annahme der Varianzhomogenität ist sehr stark verletzt.
c. Bei einem signifikanten Ergebnis ist der empirische U-Wert kleiner oder gleich dem kritischen U-Wert.
d. Verbundene Ränge treten auf, wenn zwei oder mehrere Versuchspersonen denselben Testwert aufweisen. Der diesen Versuchspersonen zugewiesene Rang ergibt sich aus der Summe der aufeinander folgenden Rangplätze geteilt durch die Anzahl der Versuchspersonen mit demselben Messwert.
e. Die U-Verteilung nähert sich bei großen Stichproben einer z-Verteilung, die H-Verteilung einer χ^2-Verteilung an.
f. Der Mann-Whitney U-Test ist ein nichtparametrisches Auswertungsverfahren für zwei unabhängige Stichproben. Der Wilcoxon-Test findet dagegen bei zwei abhängigen Stichproben Anwendung.
g. Im Wilcoxon-Test werden Nulldifferenzen bei der Vergabe der Rangplätze ausgelassen und nicht beachtet.
h. Die Nullhypothese des Kruskal-Wallis H-Tests lautet: Die zugrunde liegenden Verteilungen der untersuchten Gruppen sind identisch. Die Verteilung der Ränge zu den Gruppen ist zufällig.

Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1

a. Der kritische U-Wert bei $n_1 = 12$ und $n_2 = 15$ lautet in einem zweiseitigen Test bei $\alpha = 0{,}05$ $U_{krit} = 49$. Der empirische U-Wert ist größer als der kritische U-Wert, das Ergebnis ist nicht signifikant.
b. Die Teststärke lässt sich über den t-Test mithilfe der Formeln des t-Tests näherungsweise bestimmen.

$$\lambda_{df=1;\,\alpha} = \Phi^2 \cdot N_{(t-\text{Test})} = \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} \cdot N_{(t-\text{Test})} \Rightarrow \lambda = \frac{0{,}2}{1-0{,}2} \cdot 27 = 6{,}75$$

▶ Tabelle C im Anhang A2 von Band 1

Aus der Tabelle TPF-6 (▶ Tabelle C im Anhang A2 von Band 1, zweiseitiger Test) ergibt sich für $\lambda = 6{,}75$ eine Teststärke zwischen $66{,}7\ \% < 1 - \beta < 75\ \%$. Die Wahrscheinlichkeit, einen Effekt der Größe $\Omega^2 = 0{,}2$ zu finden, falls dieser existiert, beträgt in diesem Test 66,7 bis 75 %. Damit liegt die Wahrscheinlichkeit, den Effekt von $\Omega^2 = 0{,}2$ nicht zu finden, obwohl er existiert, zwischen 25 % und 33,3 %. Bei einem nicht signifikanten Ergebnis wäre die Annahme der Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit zwischen 25 % und 33,3 % falsch. Eine Entscheidung für die Nullhypothese, dass kein Effekt der Größe $\Omega^2 = 0{,}2$ existiert, ist aufgrund des sehr großen β-Fehlers nicht möglich.

i. Für eine Teststärke von 90 % gibt Tabelle TPF-6 (▶ Tabelle C im Anhang A2 von Band 1) einen Nonzentralitätsparameter von $\lambda = 10{,}51$ an. Die optimale Stichprobengröße in einem zweiseitigen t-Test bei $\alpha = 0{,}05$ ist:

$$N_{(t-\text{Test})} = \frac{\lambda_{1;5\%;90\%}}{\frac{\Omega^2}{1-\Omega^2}} = \frac{10{,}51}{\frac{0{,}20}{1-0{,}20}} = 42{,}04 \approx 44$$

Aufgabe 2

Die Stichproben sind groß genug, um die Signifikanzprüfung des U-Werts mithilfe der z-Verteilung vorzunehmen. Der zu erwartende Wert für U bei Zutreffen der Nullhypothese beträgt:

$$\mu_U = \frac{n_1 \cdot n_2}{2} = \frac{35 \cdot 42}{2} = 735\,; \; z_U = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{770 - 735}{20} = 1{,}75$$

Bei einer zweiseitigen Testung schneidet ein z-Wert von $z = 1{,}75$ ca. 4,01 % der Fläche auf einer Seite der Standardnormalverteilung ab, beide Flächen zusammen ergeben also 8,02 % der Gesamtfläche. Dies ist mehr als das α-Niveau von 5 % ($z_{krit} = 1{,}96$). Für die geforderte zweiseitige Testung lautet also das Ergebnis: Die Bewertungen der Sektsorten A und B unterschieden sich nur marginal signifikant voneinander.

Aufgabe 3

vorher	nachher	Differenz	Betrag	Rang	gerichteter Rang
4	7	3	3	7,5	7,5
5	6	1	1	2,5	2,5
8	6	–2	2	5,5	–5,5
8	9	1	1	2,5	2,5
3	7	4	4	9	9
4	9	5	5	10	10
5	4	–1	1	2,5	–2,5
7	8	1	1	2,5	2,5
6	8	2	2	5,5	5,5
4	7	3	3	7,5	7,5

$$\text{Summe der positiven Ränge: } \sum_{i=1}^{p} R_{i(\text{positiv})} = 47$$

$$\text{Summe der negativen Ränge: } \sum_{j=1}^{q} R_{j(\text{negativ})} = -8$$

$$W = \left|\min\left(\sum R_{\text{positiv}}, \sum R_{\text{negativ}}\right)\right| = 8$$

Der kritische W-Wert ist bei $N = 10$, einer zweiseitigen Fragestellung und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ $W_{krit} = 8$ (Wilcoxon-Test, ► Tabelle G im Anhang A2 von Band 1). $W_{emp} = 8$ ist genauso groß wie W_{krit}. Das Ergebnis ist signifikant. Ein einseitiger Test gemäß der Formulierung der Hypothese wäre noch eher signifikant, allerdings liefert die Tabelle hierfür keine kritischen Werte, sodass zweiseitig getestet werden muss. Die Bewertung der von der Therapeutin eingeschätzten Bereitschaft der Klienten, Emotionen zu verbalisieren, ist durch das Training signifikant gestiegen.

► Tabelle G im Anhang A2 von Band 1

Aufgabe 4

Aufgeklärt		Nicht aufgeklärt	
Rating	**Rang**	**Rating**	**Rang**
1	2	8	7
5	5	16	9
7	6	4	4
0	1	18	10
2	3	12	8
Summe	**17**		**38**

$$\text{Rangplatzüberschreitungen der Aufgeklärten: } U = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 6}{2} - 17 = 23$$

$$\text{Rangplatzunterschreitungen der Aufgeklärten: } U' = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 6}{2} - 38 = 2$$

Die Wahrscheinlichkeit des empirischen U-Werts von 2 ist bei $n_1 = n_2 = 5$: $p = 0{,}016$. Die Wahrscheinlichkeit ist kleiner als das Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Der Unterschied ist signifikant. Aufgeklärte Patienten geben geringeren Schmerz an als unaufgeklärte Patienten.

Aufgabe 5

vorher	nachher	Differenz	Betrag	Rang	gerichteter Rang
0	5	5	5	6	6
3	4	1	1	1	1
1	5	4	4	5	5
3	9	6	6	7	7
2	4	2	2	3	3
5	5	0	–	–	–
7	9	2	2	3	3
4	6	2	2	3	3

$$\text{Summe der positiven Ränge: } \sum_{i=1}^{p} R_{i(\text{positiv})} = 28$$

$$\text{Summe der negativen Ränge: } \sum_{j=1}^{q} R_{j(\text{negativ})} = 0$$

$$W = |\min(\sum R_{\text{positiv}}, \sum R_{\text{negativ}})| = 0$$

▶ Tabelle G im Anhang A2 von Band 1

Da eine Differenz null beträgt, sinkt die Anzahl der Versuchspersonen für die Auswertung auf $n = 7$. Der kritische W-Wert für $\alpha = 0{,}05$ (zweiseitig) ist bei $n = 7$: $W_{krit} = 2$ (Wilcoxon-Test, ▶ Tabelle G im Anhang A2 von Band 1). Der empirische U-Wert ist kleiner als der kritische U-Wert. Das Ergebnis ist auf dem 5%-Niveau signifikant.

Aufgabe 6

3 Jahre		4 Jahre		5 Jahre		6 Jahre	
Wert	**Rang**	**Wert**	**Rang**	**Wert**	**Rang**	**Wert**	**Rang**
10	12	8	8,5	16	17,5	19	20
0	1	1	2,5	6	6,5	9	10
4	5	15	15,5	13	14	18	19
15	15,5	1	2,5	3	4	10	12
8	8,5	16	17,5	6	6,5	10	12
Sum (*T*)	**42**		**46,5**		**48,5**		**73**
T^2	**1764**		**2162,25**		**2352,25**		**5329**
T^2/n	**352,8**		**432,45**		**470,45**		**1065,8**

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} = 352{,}8 + 432{,}5 + 470{,}45 + 1065{,}8 = 2321{,}5$$

Die Prüfgröße H errechnet sich wie folgt:

$$H = \left[\frac{12}{N \cdot (N+1)}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{T_i^2}{n_i}\right] - 3 \cdot (N+1) \Rightarrow H = \left[\frac{12}{20 \cdot 21}\right] \cdot 2321{,}5 - 3 \cdot 21 = 3{,}33$$

Der kritische Wert für $\alpha = 0{,}05$ in einer χ^2-Verteilung mit $df = 4 - 1 = 3$ Freiheitsgraden ist: $\chi^2_{krit} = 7{,}81$. Das Ergebnis ist nicht signifikant.

Lösungen zu Kapitel 9

Verständnisaufgaben

Richtig: b; d; f; h; j; n; p
Falsch: a; c; e; g; i; k; l; m; o

Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1

Nullhypothese: Gleichverteilung:

$$f_e = \frac{n}{k} = \frac{450}{5} = 90\ ;\ \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$$

$$\chi^2 = \frac{(82-90)^2 + (276-90)^2 + \ldots + (29-90)^2}{90}$$
$$= \frac{(-8)^2 + 186^2 + (-75)^2 + (-42)^2 + (-61)^2}{90} = 508{,}56$$

Der kritische χ^2-Wert bei $\alpha = 0{,}05$ und $df = k - 1 = 5 - 1 = 4$ Freiheitsgraden ist $\chi^2_{krit} = 9{,}49$ (▶ Tabelle H im Anhang A2 von Band 1). Das Ergebnis ist signifikant. Aus einer Betrachtung der deskriptiven Werte ist ersichtlich, dass neurotische Patienten übermäßig häufig durch eine direkte Psychotherapie behandelt werden.

▶ Tabelle H im Anhang A2 von Band 1