Aufgabe 6

3 Jahre		4 Jahre		5 Jahre		6 Jahre	
Wert	**Rang**	**Wert**	**Rang**	**Wert**	**Rang**	**Wert**	**Rang**
10	12	8	8,5	16	17,5	19	20
0	1	1	2,5	6	6,5	9	10
4	5	15	15,5	13	14	18	19
15	15,5	1	2,5	3	4	10	12
8	8,5	16	17,5	6	6,5	10	12
Sum (*T*)	**42**		**46,5**		**48,5**		**73**
T^2	**1764**		**2162,25**		**2352,25**		**5329**
T^2/n	**352,8**		**432,45**		**470,45**		**1065,8**

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} = 352{,}8 + 432{,}5 + 470{,}45 + 1065{,}8 = 2321{,}5$$

Die Prüfgröße H errechnet sich wie folgt:

$$H = \left[\frac{12}{N \cdot (N+1)}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{T_i^2}{n_i}\right] - 3 \cdot (N+1) \Rightarrow H = \left[\frac{12}{20 \cdot 21}\right] \cdot 2321{,}5 - 3 \cdot 21 = 3{,}33$$

Der kritische Wert für $\alpha = 0{,}05$ in einer χ^2-Verteilung mit $df = 4 - 1 = 3$ Freiheitsgraden ist: $\chi^2_{krit} = 7{,}81$. Das Ergebnis ist nicht signifikant.

Lösungen zu Kapitel 9

Verständnisaufgaben

Richtig: b; d; f; h; j; n; p
Falsch: a; c; e; g; i; k; l; m; o

Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1

Nullhypothese: Gleichverteilung:

$$f_e = \frac{n}{k} = \frac{450}{5} = 90\ ;\ \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$$

$$\chi^2 = \frac{(82-90)^2 + (276-90)^2 + \ldots + (29-90)^2}{90}$$
$$= \frac{(-8)^2 + 186^2 + (-75)^2 + (-42)^2 + (-61)^2}{90} = 508{,}56$$

Der kritische χ^2-Wert bei $\alpha = 0{,}05$ und $df = k - 1 = 5 - 1 = 4$ Freiheitsgraden ist $\chi^2_{krit} = 9{,}49$ (▶ Tabelle H im Anhang A2 von Band 1). Das Ergebnis ist signifikant. Aus einer Betrachtung der deskriptiven Werte ist ersichtlich, dass neurotische Patienten übermäßig häufig durch eine direkte Psychotherapie behandelt werden.

▶ Tabelle H im Anhang A2 von Band 1

Aufgabe 2

a.

$$\text{Nullhypothese: } f_e = \frac{N}{k} = \frac{200}{4} = 50$$

Gleichverteilung:

$$\chi^2 = \frac{(63-50)^2 + (56-50)^2 + (43-50)^2 + (38-50)^2}{50} = \frac{398}{50} = 7{,}96$$

Das Ergebnis ist auf dem 5%-Niveau signifikant ($\chi^2_{krit} = 7{,}81$).

Aus den Unterschieden der beobachteten zu den erwarteten Werten geht hervor, dass die qualitativ schlechteren Zahnpastamarken von den Patienten bevorzugt werden.

Zahnpasta:	No name	Aldo	Blendo	Blendo + Fluor	Σ
Anzahl an Patienten:	63	56	43	38	$n = 200$
erwartet bei Gleichverteilung:	50	50	50	50	$n_e = 200$

b. Empirische Effektstärke:

$$\hat{w}^2 = \frac{\chi^2}{N} = \frac{7{,}96}{200} = 0{,}04$$

Dies entspricht nach Cohen einem Effekt mittlerer Größe.

▶ Tabelle C im Anhang A2 von Band 1

c. Berechnung des Nonzentralitätsparameters für $w^2 = 0{,}05$: $\lambda = w^2 \cdot N = 0{,}05 \cdot 200 = 10$. Aus der Tabelle TPF-6 (▶ Tabelle C im Anhang A2 von Band 1) ergibt sich bei $df = 3$ eine Teststärke zwischen $75\,\% < 1 - \beta < 80\,\%$.

d. Stichprobenumfangsplanung (Tabelle TPF-6, ▶ Tabelle C im Anhang A2 von Band 1):

$$N = \frac{\lambda}{w^2} = \frac{14{,}17}{0{,}05} = 283{,}4 \approx 284$$

Um einen Effekt der Größe $w^2 = 0{,}05$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % zu finden, sind insgesamt 284 Versuchspersonen notwendig.

Aufgabe 3

a.

$$\text{Nullhypothese: Gleichverteilung } f_e = \frac{N}{k} = \frac{80}{3} = 26{,}67$$

Gleichverteilung:

$$\chi^2 = \frac{(36-26{,}67)^2 + (15-26{,}67)^2 + (29-26.67)^2}{26{,}67} = \frac{228{,}67}{26{,}67} = 8{,}57$$

Burilla-Nudeln	Mirucali-Nudeln	5 Glocken	Σ
36	15	29	80
26,67	26,67	26,67	

Das Ergebnis ist auf dem 5%-Niveau signifikant: $\chi^2_{krit(df=2)} = 5{,}99$

b. Der empirische Effekt ist:

$$\hat{w}^2 = \frac{\chi^2}{N} = \frac{8{,}57}{80} = 0{,}11 \text{. Es ergibt sich ein großer Effekt.}$$

c. Obwohl sich ein signifikanter großer Effekt ergibt, zeigen die Daten, dass dieses Ergebnis stark gegen die Wirksamkeit der Werbung der Firma Mirucali spricht. Trotz des Films (oder aufgrund des Films?) greifen signifikant weniger Käufer zu den Mirucali-Nudeln im Vergleich zu den anderen Anbietern.

Aufgabe 4

Nullhypothese: Annahmen über erwartete Wahrscheinlichkeiten: $p_{kurzsichtig} = 0{,}25$; $p_{nicht} = 0{,}75$

Kurzsichtigkeit	Ja	Nein	Σ
Beobachtete	40	60	$N = 100$
Erwartete	25	75	$N = 100$

$$f_{e(kurzsichtig)} = N \cdot p_{kurzsichtig} = 100 \cdot 0{,}25 = 25$$

$$f_{e(nicht)} = N \cdot p_{nicht} = 100 \cdot 0{,}75 = 75$$

$$\chi^2 = \frac{(40-25)^2}{25} + \frac{(60-75)^2}{75} = 9 + 3 = 12$$

$$\chi^2_{\text{krit(einseitig;}df=1)} = 2{,}706$$

Studenten sind im Vergleich zur relativen Häufigkeit von Kurzsichtigkeit in der Bevölkerung signifikant häufiger kurzsichtig.

Aufgabe 5

a. Berechnung einer theoretischen Effektstärke aus den relativen Häufigkeiten:

$$w^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_{bi} - p_{ei})^2}{p_{ei}};$$

$$w^2 = \frac{(0{,}09-0{,}05)^2}{0{,}05} + \frac{(0{,}91-0{,}95)^2}{0{,}95} = 0{,}032 + 0{,}00168 = 0{,}034$$

Hautkrebsrisiko	Ja	Nein
Behauptung der Forscherin	0,09	0,91
Behauptung der Behörden	0,05	0,95

b. Stichprobenumfangsplanung mit $w^2 = 0{,}034$; $\alpha = 0{,}05$ und $1 - \beta = 0{,}9$ (einseitig; $df = 1$).

$$N = \frac{\lambda}{w^2} = \frac{8{,}56}{0{,}034} = 251{,}76 \approx 252\,.$$

Die Forscherin müsste insgesamt 252 Versuchspersonen untersuchen.

c. Teststärkenberechnung a posteriori: $\lambda = w^2 \cdot N = 0{,}034 \cdot 150 = 5{,}1$.
Aus TPF-7 (► Tabelle C im Anhang A2 von Band 1) ergibt sich eine Teststärke zwischen 66,67 % < 1 – β < 75 %. Die Forscherin darf die Nullhypothese, dass kein Effekt der Größe $w^2 = 0{,}34$ vorliegt, nicht interpretieren. Der β-Fehler ist zu groß.

► Tabelle C im Anhang A2 von Band 1

Aufgabe 6

Hypothese des Forschers: Die Variable Studienfach hängt mit der Variable Einstellung zur klassischen Musik zusammen (Alternativhypothese). Nullhypothese: Die beiden Variablen sind unabhängig voneinander.

Berechnung der erwarteten Häufigkeit bei Unabhängigkeit über die Formel:

$$f_{eij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{N} = \frac{\text{Zeilensumme} \cdot \text{Spaltensumme}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

Studienfach		nie	selten	oft	Summe
Psychologie	beob.	20	20	10	**50**
	erw.	17,5	15	17,5	
Medizin	beob.	10	10	30	**50**
	erw.	17,5	15	17,5	
Mathematik	beob.	10	20	20	**50**
	erw.	17,5	15	17,5	
Jura	beob.	30	10	10	**50**
	erw.	17,5	15	17,5	
Summe		**70**	**60**	**70**	**200**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(f_{bij} - f_{eij})^2}{f_{eij}} = \frac{(20-17{,}5)^2}{17{,}5} + \frac{(20-15)^2}{15} + \frac{(10-17{,}5)^2}{17{,}5} + \frac{(10-17{,}5)^2}{17{,}5} + \ldots + \frac{(10-17{,}5)^2}{17{,}5}$$

$$\chi^2 = 38{,}1\,;\; df = (k-1)\cdot(l-1) = (4-1)\cdot(3-1) = 6\;\;;\;\; p < 0{,}001^{**}$$

Der empirische χ^2-Wert ist signifikant ($\alpha = 0{,}001$).

Die Variablen Studienfach und Einstellung zu klassischer Musik hängen systematisch miteinander zusammen. Die Unterschiede im Einzelnen werden nur durch die Betrachtung der Abweichungen der beobachteten von den erwarteten Werten deutlich. Am interessantesten sind dabei die größten Abweichungen: In der Frage nach der Anzahl der Konzertbesuche geben Mediziner häufiger als erwartet »oft« an, während Jurastudenten häufiger als erwartet »nie« angeben.